1. $a \cdot b = 2, \quad a \times b = 4e_1 + 2e_2 - e_3 = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}.$

2. 5.

3. $(b \times c) \times a = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad b \times (a \times c) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}.$

4. 英, Hamilton/哈密顿, $\bar{b}\bar{a} = 1 - i - j, \quad a = \frac{1}{2}(1 + 2j - k).$

5. 2, $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{smallmatrix}\right).$

6. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - 2y = 0, x, y \neq 0\}$, $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x - y - 1 = 0\}$.

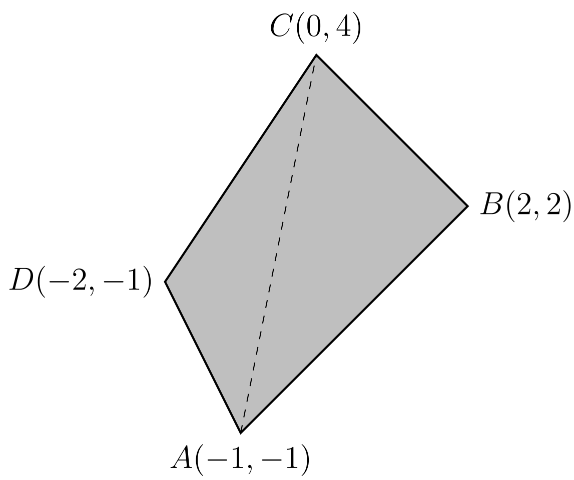
7. $(x + 2y) - (x + y)^2 = 0.$

8. $2x - y - 3z + 3 = 0.$

9.$T(C) = D, \left[\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right], \left[\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right].$

10. 8, 4

11.



$\overrightarrow{AC} = \left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 5 \end{smallmatrix}\right], \overrightarrow{AB} = \left[\begin{smallmatrix} 3 \\ 3 \end{smallmatrix}\right], \overrightarrow{AD} = \left[\begin{smallmatrix} -1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right].$

$\triangle ABC$ 的面积 $= \frac{1}{2} \left|\det \left[\begin{smallmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 3 \end{smallmatrix}\right]\right| = 6.$

$\triangle ACD$ 的面积 $= \frac{1}{2} \left|\det \left[\begin{smallmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 2 \end{smallmatrix}\right]\right| = \frac{7}{2}$

四边形 $ABCD$ 的面积 $= 6 + \frac{7}{2} = \frac{19}{2}.$

12. 令

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

(1): $(f_1,f_2,f_3)=(e_1,e_2,e_3)A \Longrightarrow f_1=a_{11}e_1+a_{21}e_2+a_{31}e_3, f_2=a_{12}e_1+a_{22}e_2+a_{32}e_3, f_3=a_{13}e_1+a_{23}e_2+a_{33}e_3$. 这说明 $f_1,f_2,f_3\in span\{e_1,e_2,e_3\}$. 因此 $span\{f_1,f_2,f_3\}\subset span\{e_1,e_2,e_3\}$.

(2): 如果 A 可逆，则有 $(e_1,e_2,e_3)=(f_1,f_2,f_3)A^{-1}$。利用 (1) 的论证过程可知 $span\{e_1,e_2,e_3\}\subset span\{f_1,f_2,f_3\}$。再结合第一问的结论可知 $span\{e_1,e_2,e_3\}=span\{f_1,f_2,f_3\}$.

(3): 令 $x=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$. 如果 $Ax=0$, 则 $(e_1,e_2,e_3)Ax=0$. 由于 $(f_1,f_2,f_3)=(e_1,e_2,e_3)A$, 从而 $(f_1,f_2,f_3)x=0$. 即 $x_1f_1+x_2f_2+x_3f_3=0$. 根据 f_1,f_2,f_3 的线性无关性可知 $x_1=x_2=x_3=0$.

在 (3) 的情况下，$\dim\operatorname{Nul}A=0,\dim\operatorname{Col}A=3$.

13. 令 $x=a+bi+cj+dk,a,b,c,d\in\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}x^2&=(a+bi+cj+dk)(a+bi+cj+dk)\\&=(a^2-b^2-c^2-d^2)+2abi+2acj+2adk\end{aligned}$$

$$x^2=-1\Longrightarrow a^2-b^2-c^2-d^2=-1,ab=ac=ad=0$$

等式 $ab=ac=ad=0$ 意味着

(1) $a=0$, 或者

(2) $a\neq 0$, $b=c=d=0$.

然而，情况 (2) 显然与 $a^2-b^2-c^2-d^2=-1$ 矛盾。所以我们必然有 $a=0$.

结论：$a=0$, b,c,d 满足条件 $b^2+c^2+d^2=1$. $x^2=-1$ 在 $\mathbb{H}$ 中的全部解为 $\{bi+cj+dk\mid b^2+c^2+d^2=1\}$.

14. 首先用初等行变换把矩阵变为约化梯形矩阵。

$$\begin{bmatrix}1&3&1&5\\5&20&6&31\\-2&-1&-1&-4\\-1&7&1&7\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&3&1&5\\0&5&1&6\\0&5&1&6\\0&10&2&12\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&3&1&5\\0&5&1&6\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&\frac{2}{5}&\frac{7}{5}\\0&1&\frac{1}{5}&\frac{6}{5}\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

Col$A$ 的一组基为 $\begin{bmatrix} 1\\5\\-2\\-1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3\\20\\-1\\7 \end{bmatrix}$.

计算 Nul$A$ 的一组基需要求解方程 $Ax = 0$. 根据化简的结果，可以得到解为 $x_1 = -\frac{2}{5}x_3 - \frac{7}{5}x_4, x_2 = -\frac{1}{5}x_3 - \frac{6}{5}x_4$. 所以

$$\begin{bmatrix} x_1\\x_2\\x_3\\x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{5}x_3 - \frac{7}{5}x_4\\ -\frac{1}{5}x_3 - \frac{6}{5}x_4\\ x_3\\ x_4 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} -\frac{2}{5}\\ -\frac{1}{5}\\ 1\\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} -\frac{7}{5}\\ -\frac{6}{5}\\ 0\\ 1 \end{bmatrix}$$

Nul$A$ 的一组基为 $\begin{bmatrix} -\frac{2}{5}\\ -\frac{1}{5}\\ 1\\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\frac{7}{5}\\ -\frac{6}{5}\\ 0\\ 1 \end{bmatrix}$

15.

解法一

单射: 令 $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$。如果 $T(x_1) = T(x_2) = 0$, 则有 $|x_1 - x_2| = |T(x_1) - T(x_2)| = 0$，所以 $x_1 = x_2$.

满射: 令 $r \in \mathbb{R}$ 为 $\mathbb{R}$ 上任意一点，我们用连续函数的介值定理证明存在某个 $x \in \mathbb{R}$ 满足 $T(x) = r$。证明的大致步骤如下。

首先，用 $\epsilon - \delta$ 语言证明保长映射 $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 是连续函数。

其次，令 $d = |T(0) - r|$。若 $d = 0$，则 0 即为我们想要寻找的原像。若 $d > 0$，由保长映射的性质易知，$d = |T(0) - r| < |T(0) - T(2d)| = |T(0) - T(-2d)| = 2d$. 这一不等式意味着，或者 r 在 $T(0)$ 与 $T(2d)$ 之间，或者 r 在 $T(0)$ 与 $T(-2d)$ 之间。根据连续函数的介值定理，如果 r 在 $T(0)$ 与 $T(2d)$ 之间，则存在某个 $x \in (0, 2d)$ 满足 $T(x) = r$；如果 r 在 $T(0)$ 与 $T(-2d)$ 之间，则存在某个 $x \in (-2d, 0)$ 满足 $T(x) = r$.

解法二

可以通过考虑不动点的个数直接证明结论。

情况 (1): T 有两个不动点. 在此情况下, 由于 T 为保长映射, 易知 $\mathbb{R}$ 上任意点均为 T 的不动点. 所以 T 为恒同映射.

情况 (2): T 仅有一个不动点. 设这个点为 p. 也就是 $T(p)=p$. 如果 $x\in\mathbb{R}$ 并且 $x\neq p$, 由保长映射这一条件可知 $|x-p|=|T(x)-p|$, 也就是 $x-p=\pm(T(x)-p)$. 如果 $x-p=T(x)-p$，可以推出 $T(x)=x$，但是这与 T 仅有一个不动点矛盾. 所以 $x-p=-(T(x)-p)$. 解得 $T(x)=2p-x$. 这一函数显然是从 $\mathbb{R}$ 到 $\mathbb{R}$ 的双射. 从几何角度描述, T 为一个以 p 为中心的翻转.

情况 (3): 任意取 $\mathbb{R}$ 上一点 p. 令 $q=T(p)$, 并且令 $S:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 为平移映射 $x\mapsto x+p-q$. 显然 S 是双射，且 S 是保长映射。我们首先证明 $S\circ T$ 为双射. 实际上，我们有

(a) $S\circ T$ 为保长映射. (两个保长映射的复合还是保长映射)

(b) p 为 $S\circ T$ 的不动点. $(S(T(p))=S(q)=q+p-q=p)$

所以根据情况 (1),(2) 的结果，我们得到 $S\circ T$ 是双射。最后，$T=S^{-1}\circ(S\circ T)$ 是两个双射的复合，所以也是双射.

关于情况 (3) 的进一步说明

对于情况 (3), 我们可以证明 $T(x)-x$ 为一个不依赖于 x 的常数, 即 T 为平移映射. 方法如下. 假设存在 $x,y\in\mathbb{R}$，使得 $T(x)-x\neq T(y)-y$. 这一条件等价于 $T(x)-T(y)\neq x-y$. 由等式 $|T(x)-T(y)|=|x-y|$ 可知 $T(x)-T(y)=y-x$. 所以 $T(x)+x=T(y)+y$. 我们令 $p=\frac{1}{2}(T(x)+x)$.

由于 T 为保长映射 $(T(p)-T(x))^2=(p-x)^2$, $(T(p)-T(y))^2=(p-y)^2$. 这两个等式相减，得到 $(T(p)-T(x))^2-(T(p)-T(y))^2=(p-x)^2-(p-y)^2$. 分解因式得到 $(T(y)-T(x))(2T(p)-T(x)-T(y))=(y-x)(2p-x-y)$. 由于 $T(x)-T(y)=y-x$, 且不为零, 可以约去它, 得到 $2T(p)-T(x)-T(y)=x+y-2p$.

等价地, 我们有

$$2T(p)=(T(x)+x)+(T(y)+y)-2p=2p+2p-2p=2p$$

这样我们就得到了 $T(p)=p$. 所以 p 为映射 T 的不动点. 这与 T 没有不动点的假设矛盾.